FUNZIONI BOOLEANE

1. Funzioni booleane

In questa sezione ci occuperemo principalmente delle *funzioni booleane*: data un'algebra di Boole B (finita o infinita), ed un numero naturale n, si considerano le funzioni in n variabili $f : B^n \to B$, dove B è il prodotto cartesiano di B per se' stesso n volte, cioè l'insieme delle n-uple di elementi di B. Esse possono essere viste come l'analogo, ad esempio, delle funzioni in n variabili reali a valori reali, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Le funzioni booleane possono essere composte mediamte le operazioni dell'algebra di Boole B: in questo modo si ottiene una struttura di algebra di Boole sell'insieme di tali funzioni. Successivamente restringeremo la nostra attenzione alle funzioni booleane *polinomiali*.

Notazione 1.1. Nel seguito denoteremo un'algebra di Boole semplicemente con B (invece di $(B, +, *, ', 0, 1)$). L'algebra di Boole $\{0, 1\}$ verrà denotata $\mathbb{B}$.

Teorema/Definizione/Notazione 1.2. Siano M un insieme e B un'algebra di Boole. Denotiamo B^M l'insieme di tutte le funzioni $f : M \to B$. Date due funzioni $f, g \in B^M$, definiamo le funzioni:
$f + g, \quad m \mapsto f(m) + g(m);$
$f * g, \quad m \mapsto f(m) * g(m);$
$f', \quad m \mapsto f(m)';$
$f_0, \quad m \mapsto 0;$
$f_1, \quad m \mapsto 1.$

Risulta che B^M, munito di queste operazioni è un'algebra di Boole.

Caso particolare 1.3. Se come insieme M si prende $B^n = B \times ... \times B$ (n volte) l'algebra di Boole delle funzioni da B^n a B si denota $F_n(B)$. È l'algebra delle funzioni in n variabili in B, a valori in B.

Esempio 1.4. $F_n(\mathbb{B})$ è l'algebra di Boole delle funzioni in n variabili a valori $\{0, 1\}$, dove ciascuna variabile può assumer solo i valori 0 e 1. Sappiamo già (prima parte del corso) che $|F_n(\mathbb{B})| = 2^{|\{0,1\}^n|} = 2^{2^n}$.
Per esempio, $F_2(\mathbb{B})$ è composta da otto funzioni: $(0, 0) \mapsto 0$, $(0, 0) \mapsto 1$, $(0, 1) \mapsto 0$, $(0, 1) \mapsto 1$, $(1, 0) \mapsto 0$, $(1, 0) \mapsto 1$, $(1, 1) \mapsto 0$, $(1, 1) \mapsto 1$.

Le funzioni di $F_n(\mathbb{B})$ possono anche essere espresse da una tabella. Ecco un esempio di un funzione di $F_3(\mathbb{B})$, $f : \{0, 1\}^3 \to \{0, 1\}$

(1)

x	y	z	f(x,y,z)
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Definizione 1.5. *(Polinomi booleani)* Sia $X_n = \{x_1, ..., x_n\}$ un insieme di n simboli (detti *indeterminate*). L'insieme P_n dei *Polinomi booleani nelle indeteminate* $\{x_1, .., x_n\}$ è l'insieme definito ricorsivamente da:
- $x_1, .., x_n$, 1 e 0 sono polinomi booleani;
- se p e q sono polinomi booleani, anche $p + q$, $p * q$, p' lo sono.

Esempio 1.6. $((x + y') * (z + t))' + (z * (t + x))'$ è un polinomio booleano nelle indeterminate x, y, z, t.

Osservazione 1.7. Per definizione, due polinomi sono uguali se e solo se i simboli che li definscono lo sono. Ad esempio $x + y$ e $y + x$ sono *diversi.* Ad esempio $(x')'$ e x sono polinomi *diversi.*

L'osservazione precedente, ed i semplici esempi in essa contenuti, mostrano chiaramente che occorre fare distinguere tra *polinomi booleani* e le *funzioni* che esse definiscono. Ad esempio, i polinomi $x + y$ e $y + x$ sono diversi. Pero', data un'algebra di Boole B, possiamo considerare le funzioni

$$f : B^2 \to B, \quad (x, y) \mapsto x + y \qquad \text{e} \qquad g : B^2 \to B, \quad (x, y) \mapsto y + x.$$

La proprietà commutativa nelle Algebre di Boole implica che $f = g$. Per questo motivo introduciamo le seguenti definizioni.

Teorema/Definizione/Notazione 1.8. *(Funzioni polinomiali booleane)* (a) Sia p un polinomio booleano in n indeterminate, $p \in P_n$. Sia B un'algebra di Boole. La *funzione polinomiale booleana indotta da* p *su* B è la funzione

$$\bar{p}_B : B^n \to B, \qquad (x_1, ..., x_n) \mapsto p(x_1, ..., x_n)$$

(b) L'insieme delle funzioni polinomiali booleane in n indeterminate su B è, per definizione, l'insieme

$$P_n(B) = \{\bar{p}_B \mid p \in P_n\}$$

Risulta che $P_n(B)$ è una sottoalgebra di Boole dell'algebra di Boole $F_n(B)$.

Proof. La dimostrazione della proposizione contenuta in (b) è ovvia, perchè si vede facilmente che, date $\bar{p}_B, \bar{q}_B \in P_n(B)$, $\bar{p}_B + \bar{q}_B$, $\bar{p}_B * \bar{q}_B$, $\bar{p}'_B$ stanno ancora in $P_n(B)$ □

Esempio 1.9. Sia $B = \{0, 1\}^3$. Sia $p = x * y$. La funzione $\bar{p}_B : B^2 \to B$ è definita da:

$$((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \mapsto (x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = (x_1 * x_2, y_1 * y_2, z_1 * z_2).$$

Conclusione: per adesso abbiamo visto, tra gli altri, due concetti importanti:
(1) *Polinomio booleano* (in n indeterminate). Essenziamente un simbolo, ottenuto componendo in vario modo le indeterminate usando le operazioni $+$, $*$, $'$, (oltre a 0 e 1);
(2) Data una qualsiasi algebra di Boole B, ogni polinomio booleano in n indeterminate induce una funzione in n variabili in B, detta *funzione polinomiale booleana.*

2. Equivalenza di polinomi booleani

Ovviamente noi siamo più interessati alle funzioni che ai polinomi. Dunque vogliamo definire una relazione di equivalenza che diichiari equivalenti due polinomi booleani se inducono la stessa funzione polinomiale. Detta così la definizione è ambigua, perchè non c'è un'unica funzione polinomiale indotta da un dato polinomio p: un polinomio p induce una funzione polinomiale $\bar{p}_B$ su ogni algebra di Boole B. Quindi ce ne sono tante quante sono le algebre di Boole[1]. Quindi dobbiamo scegliere un'algebra di Boole "di riferimento". Scegliamo la più semplice: $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

Definizione 2.1. Due polinomi booleani p e q nelle indeterminate $x_1, ..., x_n$ sono detti equivalenti ($p \sim q$) se $\bar{p}_{\mathbb{B}} = \bar{q}_{\mathbb{B}}$. Questa relazione è evidentemente una relazione di equivalenza su P_n.

Il seguente teorema è importante: dice che se due polinomi inducono la stessa funzione a variabili in $\mathbb{B}$ (cioè sono *equivalenti*) allora inducono la stessa funzione a variabili in una qualsiasi algebra di Boole B. Questo risultato non è difficile da indovinare se l'algebra di Boole B è finita, visto che sappiamo che in questo caso B è isomorfa a $\{0, 1\}^n$, ma è meno ovvio se l'algebra di Boole B è infinita.

Teorema 1. *Sia B un'algebra di Boole, e siano $p, q \in P_n$. Se $p \sim q$ allora $\bar{p}_B = \bar{q}_B$.*

Proof. Usiamo il Teorema di Rappresentazione di Stone, a cui avevamo accennato alla fine del file precedente. Esso asserisce che, data un'algebra di Boole B, esiste un insieme M tale che B è una sottoalgebra di Boole di $\mathcal{P}(M)$. D'altra parte $\mathcal{P}(M)$ è isomorfa, come Algebra di Boole, all'algebra di Boole delle funzioni da M a $\mathbb{B}$ (vedi Definizione 1.2), che denotiamo $\mathbb{B}^M$. L'isomorfismo è dato esattamente come nel caso finito: dato un sottoinsieme $C \subseteq M$, definiamo la funzione "caratteristica" di C, $\chi_C : M \to \{0, 1\}$, $m \mapsto 1$ se $m \in C$ e $m \mapsto 0$ se $m \notin C$. La funzione

$$F : \mathcal{P}(M) \to \mathbb{B}^M, \qquad C \mapsto \chi_C$$

è un isomorfismo di Algebre di Boole (esercizio). Dunque, in definitiva, B è isomorfa a una sottoalgebra di $\mathbb{B}^M$, e quindi è sufficiente dimostrare il teorema per $\mathbb{B}^M$.

Ora supponiamo $\bar{p}_{\mathbb{B}} = \bar{q}_{\mathbb{B}}$, cioè $p(i_1, ..., i_n) = q(i_1, ..., i_n)$ per ogni $i, j \in \{0, 1\}$.
Se $f_1, ..., f_n \in \mathbb{B}^M$, $p(f_1, ..., f_n)$ (risp. $q(f_1, ..., f_n)$) è la funzione da M a $\mathbb{B}$ definita da:
$p(f_1, ..., f_n)(x) = p(f_1(x), ..., f_n(x))$ per ogni $x \in M$ (risp. $q(f_1, ..., f_n)(x) = q(f_1(x), ..., f_n(x))$).
Poichè $f_i(x) \in \mathbb{B}$ per ogni $x \in M$, $p(f_1, ..., f_n) = q(f_1, ..., f_n)$. □

Il teorema precedente è molto comodo, perchè asserisce che due polinomi inducono la stessa funzione su B (una qualsiasi algebra di Boole, anche infinita) se e solo se inducono la stessa funzione sulla più semplice algebra di Boole: $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. In altre parole, la funzione indotta da p su una qualsiasi algebra di Boole è determinata dalla funzione indotta da p su $\mathbb{B}$. Una funzione $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ è detta anche una *funzione di verità*, ed è descritta da una semplice tabella, come nell'esempio 1

Esercizio 2.2. Consideriamo i polinomio booleani $p = p(x, y, z) = (x' + y' + z)' + (x * y')$ e $q = q(x, y, z) = (x * y * z') + (x * y' * z) + (x * y' * z')$. Domanda: data un'algebra di Boole B, è vero o no che p e q inducono la stessa funzione su B? Il Teorema 1 ci dice che questo avviene se e solo se p e q inducono la stessa funzione su $\mathbb{B}$, cioè se e solo se hanno la stessa "tabella". A questo punto si devono semplicemente trovare la tabella di p e quella di q e verificare se sono uguali o no. Fatelo per una volta, anche se, nella prossima sezione vedremo che c'è un modo più breve – e meno soggetto ad errori di calcolo – di fare la stessa verifica.

[1]È un po' come, ad esempio, il polinomio $p(x, y, z) = x + y + xyz$. Tale polinomio induce una funzione da $\mathbf{R}^3 \to R$, oppure da $\mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$, oppure da $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, oppure da $\mathbb{Z}_n^3 \to \mathbb{Z}_n$...

3. Forma normale disgiuntiva

Abbiamo visto che polinomi diversi possono corrispondere alla stessa funzione. Come capire rapidamente se ciò avviene oppure no? In questa sezione vedremo un modo per "normalizzare" i polinomi booleani, in modo che due polinomi sono equivalenti (cioè, per il Teorema 1, inducono la stessa funzione su ogni algebra di Boole) se e solo se hanno la stessa forma "normalizzata".

Definizione 3.1. *(Prodotti)* Date le indeterminate $x_1, ..., x_n$, un prodotto fondamentale è un polinomio che coinvolge solo i simboli $*$ e $'$ ed i cui ogni indeterminata appare al più una volta.

Esempio 3.2. Date le variabili x, y, z, t, w,

$$x * t' * w, \qquad x' * y * z * t' * w', \qquad y, \qquad z't$$

sono prodotti fondamentali. Si noti che, ad esempio $x*x'*z*w'$ e $x*x*z*w'$ non sono prodotto fondamentali (l'indeterminata x appare più di una volta). Ovviamente, visto che $x * x' \sim 0$ e $x * x \sim x$, essi sono equivalenti rispettivamente a 0 e $x * z * w'$.

Definizione 3.3. *(Somme di prodotti[2])* (a) Date le indeterminate $x_1, ..., x_n$, una somma di prodotti è un polinomio della forma $p_1 + ... + p_k$, dove p_i è un prodotto fondamentale per ogni $i = 1, ..., k$. La somma di prodotti è detta irridondante se non vi è alcun che contiene strettamente un altro prodotto[3]
(b) Una somma di prodotti completa è una somma di prodotti in cui appaiono solo prodotti in cui appaiono tutte le n indeterminate.

Esempio 3.4. Date le indeterminate x, y, z, t, w,
(a)

$$(x * t' * w) + (x' * y * z * t' * w') * y * (z't) \tag{2}$$

è una somma di prodotti.
(b)

$$(x * t' * w) + (x' * y * z * t' * w') * y * (z't) * (x * w) \tag{3}$$

è una somma di prodotti non irridondante perchè l'ultimo prodotto è contenuto nel primo. Poichè, per l'assorbimento, $(x*t'*w)+(x*w)$ è equivalente a $x*w$, il polinomio (3) è equivalente al polinomio (2).
(c)

$$(x' * y * z * t' * w') + (x * y' * z * t' * w') + (x * y * z' * t * w)$$

è una somma di prodotti completa.

Veniamo alla forma "normalizzata" di cui sopra. La seguente Proposizione dice che ogni polinomio p è equivalente ad una somma di prodotti completa, e che essa è unica a meno di scambiamento dell'ordine dei vari prodotti fondamentali. Applicando questo enunciato ad una somma di prodotti completa, questo enunicato ci dice che due somme di prodotti complete sono equivalenti se e solo se sono "uguali" (nel senso che hanno gli stessi prodotti fondamentali).

Teorema/Definizione/Notazione 3.5. *(forma normale disgiuntiva)* Per ogni polinomio $p \in P_n$, diverso da $p = 0$, esiste ed è unica (a meno di scambiare l'ordine dei prodotti fondamentali) una somma di prodotti completa equivalente a p, che si chiama *forma normale disgiuntiva* di p.

[2] Le operazioni $+$ e $*$ si chiamano, in inglese, *join* e *meet*. Più propriamente, una somma di prodotti si dovrebbe chiamare un *join of meet*

[3] Ricordiamo che, se Q e P sono prodotti, $(Q * P) + Q \sim Q$, per la legge di assorbimento. Quindi, se c'è un prodotto che contiene un altro prodotto, esso può essere "eliminato"

Proof. Si ha che $\mathbb{B}^n$ è naturalmente in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei prodotti di lunghezza n. Ad esempio: $\bar{x} = (0,1,0,1,1,1)$ corrisponde a $x_1' * x_2 * x_3' * x_4 * x_5 * x_6$. Consideriamo la funzione indotta $p_{\mathbb{B}} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Consideriamo la somma di prodotti completa q in cui appaiono i prodotti corrispondenti alle n-uple $(x_1, ..., x_n) \in \{0,1,\}^n$ tali che $p((x_1, ..., x_n)) = 1$. Si vede subito, per verifica diretta, che $p \sim q$. Infatti, per costruzione, $p(\bar{x}) = 1$ se e solo se $q(\bar{x}) = 1$. □

Esempio 3.6. Applichiamo la dimostrazione alla funzione $f(x, y, z)$ (1). La dimostrazione dice che tale funzione è equivalente a

$$p(x, y, z) = (x * y * z') + (x' * y * z) + (x' * y' * z)$$

Questo segue da verifica diretta: infatti $f(x, y, z) = 1$ se e solo se $(x, y, z) = (1,1,0), (0,1,1), (0,0,1)$, e la stessa cosa vale per $p(x, y, z)$.

Si noti che, nell'esempio precedente, non sapevamo nemmeno che $f(x, y, z)$ fosse una funzione polinomiale. Adesso lo sappiamo, perchè è equivalente ad una somma di prodotti, che è un polinomio. Questo fenomeno è il contenuto del seguente

Corollario 3.7. (a) Tutte le funzioni $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ sono polinomiali. In altre parole $F_n(\mathbb{B}) = P_n(\mathbb{B})$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(b) $|P_n(\mathbb{B})| = 2^{2^n}$.

Proof. (a) Segue dalla dimostrazione della Proposizione precedente: infatti, con lo stesso argomento, si vede che ogni funzione $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ è la funzione indotta da un'unica somma di prodotti (vedi esempio)
(b) Segue immediatamente dal fatto che, come abbiamo visto nella prima parte del corso, l'insieme delle funzioni da $\{0,1\}^n$ a $\{0,1\}$ ha 2^{2^n} elementi. □

Osservazione/Esercizio 3.8. Si vede subito che $\mathbb{B}$ è l'unica Algebra di Boole tale che $F_n(B) = P_n(B)$, cioè tale che tutte le funzioni a n-variabili $B^n \to B$ sono polinomiali. Ciò segue da questioni di numero: sappiamo che $|F_n(B)| = |B|^{|B^n|} = |B|^{|B|^n}$. D'altra parte, per il Teorema 1, sappiamo che le funzioni polinomiali $P_n(B)$ sono tante quante le funzioni polinomiali $P_n(\mathbb{B})$, che, per la proposizione precedente, sono 2^{2^n}, quindi molte meno, a meno che $B = \mathbb{B}$. Esericizo: sia $B = \{0,1\}^2$. Dare un'esempio di $f \in F_n(B)$ non polinomiale (cioè una funzione $f : B^2 \to B$ non polinomiale).

La forma normale disgiuntiva può essere trovata in due modi. Il primo, applicando direttamente la dimostrazione della Proposizione precedente: si trova la tabella e quindi la forma normale disgiuntiva.
Il secondo (certamente più breve, nel caso di molte indeterminate) consiste nel trovare dapprima una *somma di prodotti irridondante* (non completa) equivalente a p applicando le leggi di De Morgan per portare i complementi davanti alle singole indeterminate, poi applicare la proprietà distributiva e le leggi di assorbimento. Poi, arrivare alla somma di prodotti *completa* nel modo seguente: se vi è un prodotto fondamentale Q in cui, ad esempio, non appare l'indeterminata x, si ha che $Q = Q * 1 = Q * (x + x') = (Q * x) + (Q * x')$. In questo modo si arriva ad una forma completa, la forma normale disgiuntiva.

Esempio 3.9. Determinare la forma normale disgiuntiva di

$$P(x, y, z) = ((x * y)' * z)'((x + z) * (y' + z'))'.$$

Usando De Morgan e involutività abbiamo

$((x*y)'*z)'((x+z)*(y'+z'))' \sim ((x*y'')+z')*((x'+z)'+(y'+z')') \sim ((x*y)+z')*((x*z')+(y*z))$

Usiamo ora la distributività, ottenendo che

$$p(x, y, z) \sim (x * y * x * z') + (x * y * y * z) + (x * z * z') + (y * z * z')$$

Ora usiamo le leggi di complemento ($x * x' = 0$, il fatto che $x * 0 = 0$, il fatto che $x + 0 = 0$, l'idempotenza ($xx = x$) e la commutatività ($xy = yx$) e arriviamo a

$$p(x, y, z) \sim (x * y * z') + (x * y * z) + (x * z')$$

Questa forma non è irridondante. Per l'assorbimento

$$p(x, y, z) \sim (x * z') + (x * y * z)$$

Siano pervenuti ad una somma di prodotti non irridonandante. Per arrivare alla forma normale disgiuntiva, osserviamo che, poichè $x + x' = 1$ e $x * 1 = x$,

$$p(x, y, z) \equiv ((x * z') * (y + y')) + (x * y * z) \sim (x * y * z') + (x * y' * z') + (x * y * z)$$

Questa è la forma normale disgiuntiva di $p(x, y, z)$.

Esercizio 3.10. Trovare la forma normale disgiuntiva dei seguenti polinomi: $x * (y' * z)'$, $(x' + y)' + (x * y')$, $\quad y * (x + (y * z)')'$.

Nei seguenti esercizi [4] le operazioni $x + y$ e $x * y$ sono denotate rispettivamente $x + y$ e xy.

Esercizio 3.11. In un'algebra di Boole $(A, \cdot, +, ')$ si consideri l'espressione $E(x, y, z) = xy'z' + xx'y + x'z' + xyz' + x'y$. Scrivere E sotto forma di somma di prodotti irridondante.

Esercizio 3.12. (a) Sia $\mathbf{B}$ un'algebra di Boole. Per x ed $y \in \mathbf{b}$ definiamo $x \oplus y = xy' + x'y$. Stabilire se vale o meno la seguente uguaglianza: $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (x \oplus z)$.
(b) In un'algebra di Boole si consideri l'operazione $x \oplus y = x'y + xy'$. Stabilire se le funzioni booleane $F(x, y, z) = (xy) \oplus (z \oplus x')$ e $E(x, y, z) = \big((xy) \oplus z\big) \oplus x'$ sono uguali o no.
(c) In un'algebra di Boole $(\mathcal{A}, +, \cdot, ')$, si considerino le funzioni booleane seguenti:
$E = (xyz + xy)'[(x'y + yz)'xy']'$ ed $F = xyz' + x'y + y'z' + x'yz + x'y'z$.
Scrivere l'espressione booleana E in forma normale disgiuntiva (somma di prodotti); dedurne una forma normale disgiuntiva completa.

Esercizio 3.13. In un'algebra di Boole si consideri l'operazione $x \oplus y := xy' + x'y$.
Esprimere l'espressione booleana $(xy) \oplus (z \oplus x')$ come somma di prodotti.

$(xy) \oplus (z \oplus x') = (xy)(z \oplus x')' + (xy)'(z \oplus x')$

$\overset{DN}{=} (xy)(zx + z'x')' + (xy)'(zx + z'x')$

$\overset{DM}{=} (xy)(zx)'(z'x')' + (x' + y')(zx + z'x')$

$\overset{DM+DN}{=} (xy)(z' + x')(z + x) + (x' + y')(zx + z'x')$

$\overset{D}{=} xyz'z + xyz'x + xyx'z + xyx'x + x'zx + x'z'x' + y'zx + y'z'x'$

$\overset{C+Co+I}{=} xy0 + xyz' + 0yz + 0xy + 0z + x'z' + xy'z + x'y'z'$

$\overset{L}{=} xyz' + x'z' + xy'z + x'y'z' \overset{A}{=} xyz' + x'z' + xy'z.$

[4]tratti da esercizi d'esame di cui avevo la source, ma ripeto la raccomandazione di cercare di fare tutti, o almeno quanti più possibile, gli esercizi degli esami degli anni passati, visto che questi sono stati scelti per un motivo abbastanza casuale

(dove: DN=doppia negazione, DM=De Morgan, D=distributività, C=commutatività, Co=complemento, I=idempotenza, L= limitatezza, A=assorbimento).

(Alternativamente, si può pervenire al risultato trovando esplicitamente la "tabella di verità" dell'espressione, pervenendo direttamente alla espressione in somma di prodotti completata: $xyz' + x'yz' + x'y'z' + xy'z$.)

Esercizio 3.14. Esprimere come somma di prodotti l'espressione booleana $E(x, y, z, t, w) = \big((x + y')'zw' + (z't)'xy'w\big)'$.

Usando le identità di de Morgan e la distirbutività fre le operazioni $\cdot$ e $+$ dell'algebra, troviamo

$$\begin{aligned}\big((x + y')'zw' + (z't)'xy'w\big)' &= \big((x + y')'zw'\big)' \cdot \big((z't)'xy'w\big)' =\\ &= \big(x'yzw'\big)' \cdot \big((z + t')xy'w\big)' = \big(x'yzw'\big)' \cdot \big(zxy'w + t'xy'w\big)' =\\ &= \big(x'yzw'\big)' \cdot \big(zxy'w\big)' \cdot \big(t'xy'w\big)' = (x + y' + z' + w) \cdot (z' + x' + y + w') \cdot (t + x' + y + w') =\\ &= xz't + xz'y + \dots\end{aligned}$$

Esercizio 3.15. Sia $\mathcal{B}$ un'algebra di Boole. Per $x, y \in \mathcal{B}$ definiamo $x \oplus y = xy' + x'y$. Dimostrare la seguente uguaglianza o darne un controesempio: $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (z \oplus x)$.

Dalla definizione di $\oplus$ troviamo:

$$E: \quad x \oplus (y + z) = x(y + z)' + x'(y + z) = xy'z' + x'y + x'z$$

$$F: \quad (x \oplus y) + (z \oplus x) = xy' + x'y + xz' + x'z$$

Un modo per determinare se le espressioni booleane E ed F coincidono o meno è quello di scriverle come somma di prodotti completa (tale scrittura infatti è unica). Nel nostro caso, troviamo

$$E = xy'z' + x'yz + x'yz' + x'yz + x'y'z = xy'z' + x'yz + x'yz' + x'y'z$$

$$F = xy'z+xy'z'+x'yz+x'yz'+xyz'+xy'z'+x'yz+x'y'z = xy'z+xy'z'+x'yz+x'yz'+xyz'+x'y'z,$$

Da cui risulta che $E \neq F$. *Alternativamente:* Per $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$, troviamo $E(1, 0, 1) = 0 \neq F(1, 0, 1) = 1$. Da cui risulta che $E \neq F$. *Alternativamente:* Scrivere la tavola di verità di E ed F.

Esercizio 3.16. In un'algebra di Boole si consideri l'operazione $x \oplus y = x'y + xy'$. Stabilire se le funzioni booleane $F(x, y, z) = (xz) \oplus (y \oplus x')$ e $E(x, y, z) = \big((xz) \oplus y\big) \oplus x'$ sono uguali o no.

Soluzione. Scriviamo $F(x, y, z)$ come some di prodotti. Si ha $F(x, y, z) = (xz)'(y \oplus x') + (xz)(y \oplus x')' = (xz)'(yx + y'x') + xz(yx + y'x')' = (x' + z')(yx + y'x') + xz((x' + y')(x + y)) = x'y' + xyz' + x'y'z' + xy'z = x'y' + xyz' + xy'z$.

Scrivendo $E(x, y, z)$ come somma di prodotti, facendo passaggi analoghi al punto (b), risulta $E(x, y, z) = .. = x'y' + xyz' + xy'z$. Dunque $E(x, y, z) = F(x, y, z)$.